Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

Compito di Analisi III per Ingegneria Online (Gestionale e Informatica) 14–01–06; Soluzioni

Esercizio 1. Conveniva vedere la forma come somma di tre forme: $\omega_1 = \dfrac{-ydx}{x^2+y^2} + \dfrac{xdy}{x^2+y^2}$ e $\omega_2 = \sqrt{x^2+y^2}(x+y)dz$, $\omega_3 = xdz$. La curva su cui integrare è chiusa e si proietta sul piano (x, y) in una curva che NON circonda l'origine. La curva è l'ellisse $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ che si parametrizza come $x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi$, $y = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\varphi$, $z = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}(\cos\varphi+\sin\varphi)$. Grazie al fatto che la forma ω_1 è *chiusa* e il fatto che la curva, nella sua proiezione sul piano (x, y), non contiene l'origine, si ha $\oint \omega_1 = 0$. La forma $\omega_2 = dz\sqrt{z}(z+\frac{1}{4}) = d(\frac{2}{5}z^{5/2} - \frac{1}{6}z^{3/2})$ è quindi esatta e il suo integrale è nullo essendo la curva chiusa. Per l'integrale $\oint \omega_3$ non resta che fare l'integrale ossia $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi\big((\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi)\frac{1}{2}(\cos\varphi-\sin\varphi)\big) = \frac{\pi}{4}$ per cui la risposta è R7. Nessuno ha risposto esattamente.

Esercizio 2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2} dy\sqrt{y-x^2} + \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{x^2} dy\sqrt{-y+x^2} = \int_{-1}^{1} dx\frac{2}{3}(y-x^2)^{3/2}\Big|_{x^2}^{2} + \int_{-1}^{1} dx\frac{2}{3}(-y+x^2)^{3/2}\Big|_{x^2}^{2} = \int_{-1}^{1} dx\frac{2}{3}(2-x^2)^{2/3} + \int_{-1}^{1} dx\frac{2}{3}|x|^3$. Nel primo integrale si cambia variabile $x = \sqrt{2}\cos\varphi$, e si ottiene $\displaystyle\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\cos^4\varphi + 2\int_0^1 dx x^3 \overset{\text{def}}{=} I + \frac{1}{3}$. $\displaystyle\frac{1}{3} + \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\big(\cos^2\varphi - \cos^2\varphi\sin^2\varphi\big)\big) = \frac{1}{3} + \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\frac{1+\cos\varphi}{2} - \frac{8}{3}\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\sin^2\varphi = \frac{8}{3}(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}2) - \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}dz\sin^2 z + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}) - \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dz\frac{1-\cos(2z)}{2} + \frac{1}{3} = \frac{8}{3}(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}) - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$. R7 era la risposta giusta. Quattro studenti hanno risposto esattamente.

Esercizio 3. Tutti gli studenti hanno risposto esattamente.

Esercizio 4. La formula dell'ascissa del baricentro è $\dfrac{\int_{-1}^{4} dt\sqrt{2}(|t|+\frac{1}{3}a|t-3|)t}{\int_{-1}^{4} dt\sqrt{2}(|t|+\frac{1}{3}a|t-3|)}$ ed è nulla quando il numeratore è nullo. Ciò accade per $a = -14$. Un solo studente ha risposto esattamente.

Esercizio 5. $\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\le y} dxdx\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz = \int\int_{x^2+y^2\le y} dxdx\sqrt{x^2+y^2}$,. Per proseguire conviene passare a coordinate polari. $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. La relazione $x^2+y^2 = y$ diventa $r = \sin\varphi$ e chiaramente possiamo avere solo $0 \le \varphi \le \pi$. Il volume è quindi $\displaystyle\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{\sin\varphi} dr\, r^2 = \int_0^{\pi} d\varphi\frac{1}{3}\sin^3\varphi = \frac{4}{9}$. R1 era la risposta giusta. Nessuno ha tentato di rispondere.

Esercizio 6. $f_x = z^x + (\ln y)^{x^2} 2x\ln(\ln y)$, $f_y = \dfrac{x^2}{y}(\ln y)^{x^2-1}$ $f_z = xz^{x-1}$ che calcolate in $(-1, e, 1)$ danno $(0, -\frac{1}{e}, 1)$. R1 era la risposta giusta e quattro studenti hanno risposto esattamente.

Esercizio 7. Si potevano valcolare le derivate oppure usare lo sviluppo $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ e sostituire $x+y$ a x. Si otteneva $-1, \frac{1}{3}, 1)$. Cinque studenti hanno risposto esattamente

Esercizio 8. La soluzione è analoga ed anzi più facile di quella dell'esercizio analogo presente nel compito del 7–01–06. In questo caso infatti la divergenza è zero. La soluzione è $\frac{\pi}{3}$ e quindi R7. Tutti hanno rispostoe esattamente.

Esercizio 9. La prima funzione non ammette limite. Ledue restrizioni $y = x$ e $y = |x|^\alpha$ con $\alpha < \frac{1}{9}$ danno luogo a limiti diversi. La seconda funzione ammette limite per via del fatto che $|xy| \le 2(x^2+y^2)$. La terza non ammette limite in quanto le due restrizioni $y = |x|$ e $y = |x|^\alpha$ $\alpha > 1$ danno luogo alimiti diversi. R2 due era la risposta giusta e un solo studente ha risposto esattamente.

Esercizio 10. $\delta_o \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{b}}^{\frac{\pi}{b}} dx \sqrt{1+\cos^2(bx)}|\cos(bx)| = \frac{\delta_o}{b}\int_{-\pi}^{\pi} dx\sqrt{1+\cos^2 x}|\cos x| = 2\frac{\delta_o}{b}\int_0^{\pi} dx\sqrt{1+\cos^2 x}|\cos x| =$ $2\dfrac{\delta_o}{b}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\cos x - 2\frac{\delta_o}{b}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\cos x$. Nel secondo integrale si cambia variabile $\pi - x = t$ e diventa uguale al primo per cui alla fine si ha $\frac{4\delta_o}{b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\cos x$. Si definisce $z = \sin x$ per cui $dz = \cos dx$ e quindi $\dfrac{4\delta_o}{b}\displaystyle\int_0^1 dz\sqrt{2-z^2}$. Ora si definisce $z = \sqrt{2}\sin t$ e l'integrale diventa $4\dfrac{\delta_o}{b}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos t) = \frac{\delta_0}{b}(2+\pi)$. Nessuno studente ha risposto.

Esercizio 11. $I = \displaystyle\int_0^2 dy\int_0^1 dx\, x^2(e^{xy})_x = \int_0^2 dy\, x^2 e^{xy}\Big|_0^1 - \int_0^2 dy\, 2\int_{-1}^1 dx\, xe^{xy} = \int_0^2 e^y - 2\int_0^1 dx\int_0^2 dy(e^{xy})_y =$ $\displaystyle\int_0^2 dy\, e^y - 2\int_0^1 dx\,(e^{2x}-1) = e^2 - 1 - 2(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}) + 2 = 2$. Due studenti hanno risposto esattamente.